الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

المتتاليات العددية

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2023 - 2022

1. المتتاليات العددية :

1.9 تعاريف :

تعريف1 :

يسمى كل تطبيق

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u_n$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ **متتالية حقيقية.**

تعريف2 :

متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى العدد $u(n)$.

2.9 مصطلحات:

- صورة عدد طبيعي n، يرمز لها بالرمز $u(n)$ او u_n.
- العدد الطبيعي n يسمى رتبة الحد u_n.
- يرمز الى المتتالية باحدى الرموز $(u_n)_{n\in N}$ او $(u_n)_{n\geq n0}$ ، $(v_n)_{n\in N}$ او $(v_n)_{n\geq n0}$ ...

مثال 1 :

لدينا بعض العبارات التي تعرف متتاليات ، حيث n عدد طبيعي:

$u_n = (-1)^n$ ، $u_n = \sqrt{n}$ ، $u_n = \frac{1}{n+2}$ ، $u_n = -\frac{\sqrt{n}}{n+2}$.

مثال 2:

1 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة بحدها العام u_n كما يلي $u_n = \frac{n}{n^2+1}$:

يمكن حساب اى حد من حدودها.

$$u_0 = \frac{0}{0^2+1} = 0 \quad , \quad u_{10} = \frac{10}{10^2+1} = \frac{10}{101} \quad u_{320} = \frac{320}{320^2+1} = \frac{320}{102401} \; ,$$

2 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ و المعرفة بعلاقة تراجعية كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

من اجل $n = 1$: نجد $u_2 = -5$

من اجل $n = 2$ نجد: $u_2 = 16$.

وهكذا....

3 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ و المعرفة بعلاقة تراجعية كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

من اجل $n = 0$: نجد $u_2 = 3$.

من اجل $n = 1$: نجد $u_3 = 4$.

وهكذا....

تمرين 1 :

احسب في كل الحالات التالية الحدود الخمسة الاولى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والمعرفة كما يلي :

1 - $u_n = \dfrac{n+1}{(n^2+1)}$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

2 - $u_n = 2^n$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

3 - $u_1 = -2$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$ من اجل $n \in \mathbb{N}$.

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و المعرفة كما يلي : $u_n = -3n + 5$

اكتب بدلالة n عبارة : $u_{n+1}\,;\, u_n + 1\,;\, u_{n+2}\,;\, u_{2n}\,;\, u_{2n+1}$

3.9 اتّجاه تغيّر متتالية عددية:

1.3.9 متتالية متزايدة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبرمن أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$) .

2.3.9 متتالية متناقصة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$) .

3.3.9 متتالية ثابتة:

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n\geq n_0$ ، $u_{n+1}=u_n$.

4.3.9 متتالية رتيبة:

إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما) أو متزايدة (متزايدة تماما)، نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما) .

مثال :

- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n=(-1)^n$ غير رتيبة.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n=\sqrt{n}$ متزايدة.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n=\frac{1}{n+2}$ متناقصة.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات عبارة الحد العام $u_n=-\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ متزايدة.

4.9 متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

1.4.9 متتالية محدودة من الأعلى:

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا وجد ثابت M موجب

بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \le M$$

- نقول أن M عنصر حاد من الأعلى .

2.4.9 متتالية محدودة من الأسفل :

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأسفل إذا وجد ثابت M موجب بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \ge M$$

- نقول أن M عنصر حاد من الأسفل .

3.4.9 متتالية محدودة :

نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا وجد ثابت M موجب بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \le M$$

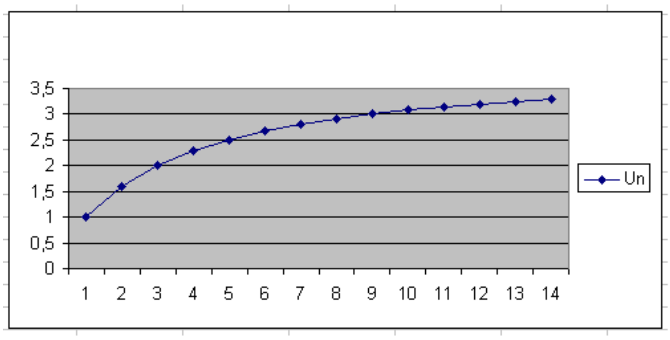
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل

مثال1:

لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$u_n = \dfrac{4n}{n+3}$:



الرسم المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n)

نلاحظ أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و1 هوعنصر حاد من الأسفل .

لنبرهن ذلك.

نقارن بين $4n$ و $n+3$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 4n-(n+3)=3n-3=3\ n-1$$

أي $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4n-(n+3) \geq 0$.

و منه $\forall n \in \mathbb{N} : 4n \geq (n+3)$ و بالتالي $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{4n}{n+3} \geq 1$ إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1$.

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأسفل .

مثال2:

لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{n+2}{n}$.

- المتتالية u_n محدودة من الأعلى و3عنصر حاد من الأعلى .
- المتتالية u_n محدودة من الأسفل و1 عنصر حاد من الأسفل .

و منه المتتالية u_n متتالية محدودة .

تمرين :

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \frac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأسفل.

طريقة:

لإثبات أن متتالية u_n معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .

- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $]0;+\infty[$.

الحل:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2+x+9}{x} .$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0 $\qquad$ 3 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ 7 $\quad$ $\nearrow$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n \geq 7$ ، و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين :

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2+2}{n^2+1}$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3.

الحل:

نحسب الفرق $u_n - 3$.

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{3n^2+2}{n^2+1} - 3 \\ &= \frac{3n^2+2-3n^2-3}{n^2+1} \\ &= \frac{-1}{n^2+1} \end{aligned}$$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{-1}{n^2+4} \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 3 \leq 0$.

و بالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 3$.

إذن المتتالية u_n محدودة من الأعلى و3عنصر حاد من الأعلى .

تمرين :

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}, \ n \geq 0 \end{cases}$.

- أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأسفل.
- أدرس رتابة المتتالية u_n .

5.9 تقارب متتالية عددية:

1.5.9 نهاية متتالية عددية:

تعريف:

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة .

و نكتب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$

تعريف :

نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **متقاربة** إذا وجد عدد ℓ **بحيث** $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-u|=0$ أي

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}\ :\quad n\geq n_0\ \Rightarrow\ |u_n-\ell|<\varepsilon$$

و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$

ملاحظة :

- نقول عن متتالية إنها متباعدة عندما لا تكون متقاربة.
- إذا تقاربت متتالية عددية فإن نهايتها وحيدة.

ملاحظة :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

مثال:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{-n+2}{3n+1}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

المتتالية (u_n) من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x+2}{3x+1}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\dfrac{1}{3}$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\dfrac{1}{3}$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة:

العكس غير صحيح :

2.5.9 تعاريف:

(u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة ، و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة ، و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

ملاحظة:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

تمرين:

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{2n^2-n+3}{2n^2+1}$.

- عين نهاية هذه المتتالية .

الحل:

لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية u_n و منه $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{2x^2+1}$ و المعرفة على $\mathbb{R}_+$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و منه المتتالية u_n لها نفس النهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

تمرين:

u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

لتكن v_n المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

- أثبت أن المتتالية v_n متتالية حسابية ثم استنتج نهاية u_n .

الحل:

- نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 :

من أجل $n=0$ ، $u_0 = 3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 :

نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي موجب تماما. أي: $u_n \neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \neq 1$ و نبرهن بالخلف .

نفرض $u_{n+1} = 1$ أي $\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} = 1$ و نستنتج أن $u_n = 1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع .إذن من أجل كل عدد طبيعي

n $u_n \neq 1$.

- إثبات أن v_n متتالية حسابية

لدينا $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ و منه $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

و بالتالي $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 1}{3u_n - 3} = \dfrac{1}{3}$.

إذن v_n متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ لأن $r > 0$

و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3.5.9 مبرهنة:

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

ملاحظة:

- إذا كانت متزايدة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأعلى للمتتالية.
- إذا كانت متناقصة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأدنى للمتتالية.

4.5.9 خواص:

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متقاربتين فإن :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\times\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$
4. من أجل كل عدد λ (حقيقي أو عقدي) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.
5. عندما يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\neq0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}$.
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=\left|\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\right|$.
7. إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n\leq v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

ملاحظة :

نستخلص من الخاصية 7. أن :

$$u_n\leq0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}u_n\leq0$$
$$u_n\geq0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}u_n\geq0,$$

5.5.9 مبرهنة : (الحصر)

إذا كانت (v_n) ،(u_n) ،(w_n) متتاليات حقيقية تحقق:

$$\begin{cases}v_n\leq u_n\leq w_n\\ \lim v_n=\lim w_n=k\\ k\in\mathbb{R},\end{cases}$$

فإن (u_n) متقاربة ونهايتها هي k.

مبرهنة :

كل متتالية عددية **متقاربة** هي متتالية **محدودة**. والعكس غير صحيح.

أمثلة:

1. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات الحد العام $u_n=(-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة).
2. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات الحد العام $u_n=\sqrt{n}$ متباعدة.
3. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات الحد العام $u_n=\dfrac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0..
4. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات الحد العام $u_n=-\dfrac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو 3- .

6.9 المتتاليات الحسابية:

1.6.9 تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتا و هذا الثابت هو أساسها r.
- كل متتالية حسابية تكون معرفة بحدها الأول و أساسها.

مثال:

نعتبرالمتتالية (u_n) بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=-3n+1$.

- برهن أن المتتالية (u_n) حسابية ،عين حدها الأول u_0 .

الحل :

لنبين أن المتتالية (u_n) حسابية:

حساب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -3(n+1)+1-(-3n+1) \\ &= -3n+3+1+3n-1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

و منه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$ و حدها الأول $u_0=1$.

2.6.9 خاصية مميزة : (الوسط الحسابي)

نعتبرالمتتالية (u_n) :

$$\left((u_n) \text{ حسابية} \right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1}-u_n = u_n - u_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 2u_n = u_{n+1}+u_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$$

خاصية :

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا وفقط إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$$

يعني $\forall n \in \mathbb{N}: 2u_n = u_{n+1}+u_{n-1}$

ملاحظة :

تكون الأعداد b,a و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان:

$2b = a+c$.

يسمى العدد b بالوسط الحسابي للعددين c,a.

3.6.9 عبارة الحد العام:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي):

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n = u_0 + nr$$

ملاحظة :

- إذا كان u_1 الحدها الأول المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r فإن:

$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = u_1 + (n-1)r$.

- إذا كان u_α و u_n حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r (لايهم الترتيب) فإن :

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_\alpha + (n-\alpha)r$.

مثال 1:

ليكن $u_{68} = 205$ و $u_{11} = 34$ حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r.

لنحسب الأساس r.

لدينا

$$u_{11} = u_{68} + (11-68)r$$

و منه $u_{11} - u_{68} = -57r$

و منه $34 - 205 = -57r$

و بالتالي و منه $r = 3$

مثال 2:

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها $r = -3$ و $u_{20} = 100$.

لنحسب الحدين u_5 و u_0.

- لدينا

$$u_5 = u_{20} + (5-20)(-3) \\ = 145$$

و لدينا

$$u_0 = u_5 + (0-5)(-3)$$
$$= 160$$

4.6.9 مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

(u_n) متتالية حسابية ، حدها الأول u_0 ، حدها الأخير u_n و أساسها r (r عدد حقيقي):

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

ملاحظة :

(u_n) متتالية حسابية ، حدها الأول u_α ، حدها الأخير u_β و أساسها r:

$$\begin{aligned} S &= u_\alpha + ... + u_\beta \\ &= (\beta - \alpha + 1)\left(\frac{u_\alpha + u_\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

مثال 1:

(u_n) متتالية حسابية ، حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = 2$:

لنحسب الأساس $S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$.

حساب u_{n-1}.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي r : $u_n = u_0 + nr$ و منه

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= u_0 + (n-1)r \\ &= 2 + (n-1)3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \dots\dots\dots + u_{n-1} \\ &= \left((n-1)-0+1\right)\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right) \\ &= (n)\left(\frac{3+3n-1}{2}\right) \\ &= (n)\left(\frac{2+3n}{2}\right) \end{aligned}$$

مثال 2:

ليكن $u_{68} = 205$ و $u_{11} = 34$ حدين من حدود المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها r.

لنحسب الأساس $S = u_{11} + \dots\dots\dots + u_{68}$.

لدينا

$$\begin{aligned} S &= u_{11} + \dots\dots\dots + u_{68} \\ &= (68-11+1)\left(\frac{u_{11} + u_{68}}{2}\right) \\ &= (58)\left(\frac{34+205}{2}\right) \\ &= 6931 \end{aligned}$$

مثال 3:

حساب المجموع $S = 2+4+\dots\dots\dots+2n$.

S هو مجموع n حدا من حدود متتالية حسابية ذات الأساسها $r = 2$.

ومنه

$$\begin{aligned} S &= 2+4+\dots\dots\dots+2n \\ &= (n)\left(\frac{2+2n}{2}\right) \\ &= (n)(1+n) \end{aligned}$$

7.9 المتتاليات الهندسية:

1.7.9 تعريف:

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا وفقط إذا كان نسبة بين حدين متتابعين ثابتا و هذا الثابت هو أساسها q.
- كل متتالية هندسية تكون معرفة بحدها الأول و أساسها.

2.7.9 ملاحظات:

- جداء متتاليتان هندسيتان هي متتالية هندسية حدّها الأول جداء الحدين الأولين و أساسها جداء الأساسين.
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها $q\neq 0$ وحدها الأول u_0 فإن المتتالية $(u_n)^p$، مع p عدد صحيح، هي متتالية هندسية أساسها q^p و حدها الأول u_0^p.
- إذا كان $u_0=0$ فإن المتتالية (u_n) معدومة و إذا كان $q=0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=0$.
- إذا كان الأساس $q=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=u_0$.

مثال:

نعتبرالمتتالية (u_n) بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=2\times 3^n$.

- برهن أن المتتالية (u_n) هندسية ،عين حدها الأول u_0 .

الحل :

لنبين أن المتتالية (u_n) هندسية:

حساب النسبة $q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3$$

و منه المتتالية (u_n) حسابية أساسها $q=3$ و حدها الأول $u_0=2$.

3.7.9 خاصية مميزة : (الوسط الهندسي)

نعتبرالمتتالية (u_n) :

((u_n) هندسية) $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}: u_n^2 = u_{n+1}\times u_{n-1}$

ملاحظة :

تكون الأعدد b,a و c غير معدومة بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

$b^2 = a\times c$.

يسمى العدد b بالوسط الهندسي للعددين c,a.

4.7.9 عبارة الحد العام:

(u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

$$\forall n\in\mathbb{N}: u_n = u_0\times q^n$$

ملاحظة :

- إذا كان u_1 الحدها الأول المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q فإن:
$\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n = u_1\times q^{n-1}$.
- إذا كان u_α و u_n حدين من حدود المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q (لايهم الترتيب) فإن :

$\forall n\in\mathbb{N}: u_n = u_\alpha\times q^{n-\alpha}$.

مثال 1:

لتكن المتتالية الحسابية (u_n) ذات الأساسها $r=\frac{1}{2}$ و الحد الأول $u_1=5$.

كتابة عبارة الحد العام u_n.

- لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=u_1\times q^{n-1}$

و منه $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

مثال 2:

ليكن $u_4=162$ و $u_9=39366$ حدين من حدود المتتالية الهندسية (u_n) ذات الأساسها q.

لنحسب الأساس q.

لدينا

$$u_9=u_4\times q^{9-4}$$

و منه $39366=162\times q^4$

و منه $q^4=\frac{39366}{162}$
$=243$

و بالتالي و منه $r=3$

5.7.9 مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم).

إذا كان $q\neq 1$ فإن $S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.

إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$.

ملاحظة :

(u_n) متتالية هندسية ، حدها الأول u_α ، حدها الأخير u_β و أساسها r:

$$\begin{aligned} S &= u_\alpha + ... + u_\beta \\ &= u_\alpha\left(\frac{1-q^{\beta-\alpha+1}}{1-q}\right) \end{aligned}$$

مثال 1:

(u_n) متتالية هندسية ، حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = 2$:

لنحسب الأساس $S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + ... + u_{n-1} \\ &= u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\ &= 3\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) \\ &= -3(1-2^{n+1}) \end{aligned}$$

مثال 2:

حساب $S = 5 + 5\times\frac{1}{2} + +5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $S = \frac{1}{2}$ و عدد حدودها $n+1$.

إذن

$$\begin{aligned} S_n &= 5\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 10\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

مثال 3:

حساب المجموع $S = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n$ حيث $x \neq 1$.

S هو مجموع $n+1$ حدا من حدود متتالية هندسية ذات الأساسها $q = x$ و الحد الأول 1.

ومنه

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = 1 \times \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

6.7.9 نهاية متتالية هندسية :

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q \le -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

دراسة تقارب متتالية هندسية:

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث: $q \ne 0$، $q \ne 1$ و $u_0 \ne 0$.

- (u_n) متقاربة يكافئ $-1 < q \le 1$.
- (u_n) متباعدة يكافئ $1 < q$ أو $q \le -1$.

تمرين :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).استنتج (u_n) بدلالة n .

الحل:

- الحد الأول للمتتالية (v_n) هو v_0 ، $v_0 = u_1 - u_0 = 3-5(0)-1-3 = -1$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n-1$. إذن : $v_n = -5n-1$

$v_{n+1} - v_n = -5(n+1)-1-(-5n-1) = -5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -5$.

و منه المتتالية (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0 = -1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -1-5n$. $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}\ 5+5-5n = \frac{n}{2}\ -2-5n$.

$v_0 = u_1 - u_0$ ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، ... ، $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n = S + u_0$

و منه $u_n = \frac{n}{2}\ -2-5n\ +3$.

تمرين :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ،ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n)؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S.استنتج نهاية (u_n).

الحل:

- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}\ u_n-3\ =\frac{1}{3}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

- $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$.

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

8.9 المتتاليان المتجاورتان:

1.8.9 مبرهنة :

نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) أنها متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت نهاية متتالية الفرق (u_n-v_n) متقاربة نحو 0.

مثال :

المتتاليتان $u_n=-\frac{1}{n}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة وفرقهما (المساوي ل $v_n-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{2n+1}{n(n+1)}$) يؤول إلى الصفر.

2.8.9 مبرهنة :

إذا كانت u_n و v_n متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

مثال:

لتكن المتتالية u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

و المتتالية v_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

- حساب الفرق $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

- حساب الفرق $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \end{aligned}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

- حساب $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= u_n - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

و منه $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

الخلاصة :

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ فإن u_n و v_n متجاورتان .

تمرين :

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
2) أحسب w_n بدلالة n.
3) ما هي نهاية (w_n)؟
4) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .
5) ما هي نهاية (t_n)؟
6) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.
7) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل:

1. إثبات أن المتتالية (w_n) هندسية.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{u_n - v_n}{12} \end{aligned}$$

أي $w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$.

2. حساب w_n.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

3. حساب النهاية :

بما أن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

و بالتالي (w_n) متقاربة.

4. إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} \\ &= \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n \\ &= 3u_n + 8v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

منه المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

5. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$$

6. إثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين.

أ- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} \\ &= \frac{-2(u_n - v_n)}{3} \\ &= -\frac{2}{3} w_n \end{aligned}$$

و منه $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

ب- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n \\ &= \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \\ &= \frac{(u_n - v_n)}{4} \\ &= \frac{1}{4} w_n \\ &= \frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{aligned}$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n > 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

ج- نعلم أن $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$.

و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 .

و بالتالي المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

7. لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t_0 = 44$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} 3u_n + 8v_n = 44$

نستنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$.

9.9 تمارين مقترحة :

3.8.9 أسئلة متعددة الاختيار (Q C M)

تمرين 1:

لكل سؤال، يوجد بالضبط جوابان صحيحان، أذكرهما. التبرير غير مطلوب.

1) المتتاليات التالية متقاربة:

أ) $\left(\dfrac{2^n}{n^{2022}}\right)_{n>0}$ ؛ ب) $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ ؛ ج) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n>0}$ ؛ د) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2) نعتبر المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq v_n \leq w_n$

و$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ و$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ فإن:

أ) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ؛ ب) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل

ج) من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\leq v_n \leq 1$ ؛ د) لا نعرف إن كان للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية أم لا.

3) متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1\,,\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

أ) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و تتقارب الى 1، فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين ذات معادلتين $y = x$ و$y = 2x-1$

ب) المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 1$؛ هي متتالية هندسية.

ج) المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى

د) المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \ln(u_n - 1)$؛ هي متتالية حسابية.

4) متتاليتان (x_n) و(y_n) معرفتان من أجل $n>0$ بالعلاقتين:

$$x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$$

أ) المتتاليتان (x_n) و(y_n) متزايدتان

ب) $x_3 = \dfrac{19}{20}$ و $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

ج) المتتاليتان (x_n) و(y_n) ليستا محدودتان من الأعلى.

د) المتتاليتان (x_n) و(y_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية.

تمرين2:

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بِ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

أ ـ أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 .

ب ـ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

جـ ـ جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د ـ أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

تمرين3:

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بِ $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 4u_n + 3$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n + 1$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$.

تمرين4:

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 علما أنّ $u_0 = \frac{2}{9}$

- أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + ... + u_{10}$.

تمرين5:

لتكن المتتالية (u_n) ذات الحد الأول $u_1 = 1$ ، وحيث من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1،

$u_{n+1} = 2u_n + 3$.

من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، نضع : $v_n = u_n + 3$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

. $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

تمرين6:

(u_n) هي المتتالية المعرفة بِ $u_0 = \frac{1}{6}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{8}$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بِ : $v_n = 2u_n + \frac{5}{3}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 و v_2 .

2) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أحسب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

4) أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث : $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، $t_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

تمرين7:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بِ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$$.
بل كل

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - au_n$. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها b .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_{n+1} - bu_n$. برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

تمرين8:

a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كانت a , b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

تمرين9:

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية . أحسب a ، b و c علما أن $\begin{cases} a+b+c=36,75 \\ abc=343 \end{cases}$.

تمرين10:

a ، b و c ثلاث أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

نفرض أن a ، b و c تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسة أساسها q ؛ و $3a, 2b, c$ تشكل ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية . أحسب q .عدد حقيقي معطى .

تمرين11:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بِـ : $u_1 = a$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$.

1) (v_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بِـ : $v_n = 13u_n - 4$.

برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q .

2) عبر عن v_n بدلالة a و n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة a و n .

3) أحسب بدلالة a و n المجموع :

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

10.9 تمارين اضافية :

4.8.9 المتتاليات الحسابية :

تمرين 1: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n+3$

1) أحسب u_0,u_1,u_2 . ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2021$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_9 + u_{10} + ... + u_{22}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 2: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 5n-4$

1) أحسب u_0,u_1,u_2 . ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2023$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_5 + u_6 + ... + u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 3: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \frac{1}{2}n + \frac{2}{3}$

1) أحسب u_0,u_1,u_2 . ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 200$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{10} + u_{11} + ... + u_{28}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 4: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -3n+2$

1) أحسب u_0,u_1,u_2 . ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > -444$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{41} + u_{42} + ... + u_{88}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 5: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -2n+5$

1) أحسب u_0,u_1,u_2 . ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -500$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{11} + u_{12} + ... + u_{55}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 6: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $r = 2$.

1) أحسب u_{88} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < 1988$.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

4) عين n علما أن $S_n = 1230$.

تمرين 7: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 وتحقق: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = 4n^2 + 5n$$

1) عين u_1, u_2, u_{10} ثم عين u_n بدلالة n .

2) ما هي طبيعة المتتالية (u_n)؟

تمرين 8: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 وتحقق: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = 7n^2 - 2n$$

1) عين u_1, u_2, u_{10} ثم عين u_n بدلالة n .

2) ما هي طبيعة المتتالية (u_n)؟

تمرين 9: a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

1) أثبت أن الأعداد الحقيقية $a^2 - bc,\ b^2 - ac,\ c^2 - ab$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

2) أثبت أن الأعداد الحقيقية $b^2 + bc + c^2\ ,\ c^2 + ac + a^2\ ,\ a^2 + ab + b^2$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 10: إذا كانت الأعداد: $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية فأثبت أن: a^2, b^2, c^2 تشكل أيضا حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

تمرين 11: a عدد حقيقي.

بين أن الأعداد الحقيقية $(a^2 - 2a - 1)^2, (a2 + 1)^2, (a^2 + 2a + 1)^2$ حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 12: a عدد حقيقي غير معدوم و لا يساوي $\frac{1}{2}$

بين أن الأعداد الحقيقية $\frac{2a^2 - 2a + 1}{2a^2 - 2a}, \frac{2a}{2a - 1}, \frac{a+1}{a}$ حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 13: a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية ، عينها علما أن:

$$\begin{cases} a+b+c=21 \\ a\times b\times c=-105 \end{cases} ......(1)\ ,\ \begin{cases} a+b+c=93 \\ a\times b\times c=3720 \end{cases} ......(2)\ ,\ \begin{cases} a+b+c=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases} ......(3).$$

$$\begin{cases} a+b+c=333 \\ a^2+b^2+c^2=37205 \end{cases} .....(6)\ \begin{cases} a+b+c=336 \\ a\times b\times c=1391376 \end{cases} ......(4),\ \begin{cases} a+b+c=963 \\ a\times b\times c=3306405 \end{cases} ....(5),$$

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a+2b+3c=34 \end{cases} ......(9)\ \begin{cases} a+b+c=9 \\ a^2+b^2+c^2=35 \end{cases} ...(7),\ \begin{cases} a+b+c=312 \\ c-a=192 \end{cases} ....(8),$$

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ a-5b+6c=-11 \end{cases} ......(10),$$

تمرين 14: عين d,c,b,a أربع أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases} a+b=30 \\ c\times d=45 \end{cases}$

تمرين 15: عين d,c,b,a أربع أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases} a+b=30 \\ c\times d=35 \end{cases}$

تمرين 16: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_4+u_5+u_6=69 \end{cases}$

1) عين u_2 و u_5 و استنتج الأساس r و الحد الأول u_1.
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n<566$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n.
5) عين n علما أن: $S_n=497$

تمرين 17: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما أساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=165 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=6655 \end{cases}$$

1) عين u_3 والأساس r.
2) أحسب u_n بدلالة و استنتج u_1.
3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>5661$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n.
5) عين n علما أن: $S_n=497$

تمرين 18: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما أساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=45 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=1045 \end{cases}$$

1) عين u_3 والأساس r.
2) أحسب u_n بدلالة و استنتج u_1.
3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>2222$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n.
5) عين n علما أن: $S_n=497$

تمرين 19:

1) لتكن المتتالية الحسابية للأعداد: ....,-4,-7,-10- نريد حساب 25 حدا من حدودها ليكون مجموعها 1400 . ما هي رتبة الحد الذي نبدأ به ؟ و ما قيمته؟.

2) طريق مستقيم طوله 166 ميلا .بدأ شخصان الحركة معا من نهايتيه فإذا قطع أحدهما في اليوم الأول مسافة 10 أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تزيد ميلا واحد عن مسافة اليوم السابق . أما الأخر فقطع في اليوم
الأول مسافة 9أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تنقص نصف ميل عن مسافة اليوم السابق.
أوجد بعد كم يوم يتقبلان.

3) أ) رسم الدخول إلى معرض في يومه الأول $45\ DA$ ثم ينقص بمقدار $1{,}5\ DA$ في كل يوم من الأيام التالية.
أوجد رسم الدخول في اليوم الخامس عشرا.

ب) أراد رجلا أن يدخل المعرض يوميا في أسبوعه الثالث فأوجد ما يوفره إذا أشترى تذكرة أسبوعية بمبلغ 100 DA

5.8.9 المتتاليات الهندسية:

تمرين 20: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2\times 3^n$

1) أحسب u_2, u_1, u_0.
2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
3) عين العدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 12288$.
4) أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n.

تمرين 21: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = (-6)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1) أحسب u_2, u_1, u_0.
2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
3) أدرس تغيرات المتتالية (u_n),
4) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{20} + u_{21} + \dots + u_{111}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ بدلالة n.
5) عين n علما أن: $S_n = -\frac{1024}{64}$.

تمرين 22: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\times 3^n$

1) أحسب u_2, u_1, u_0.
2) أدرس تغيرات (u_n).
3) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n.

5) عين العدد الطبيعي n علما أن: $S_n=-182$

تمرين 23: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

1) أحسب u_2,u_1,u_0.
2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=\frac{1}{4096}$.
4) أحسب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+\ldots..+u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 24: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{3}{4}$ تحقق $u_2=\frac{63}{16}$

1) أحسب u_0 ثم أحسب u_n بدلالة n.
2) أدرس تغيرات (u_n).
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.
4) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $S_n=\frac{1225}{64}$.

تمرين 25: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=-2$ و أساسها $q=\frac{1}{2}$.

1) أحسب u_1, u_2 ثم أحسب u_n بدلالة n.
2) أدرس تغيرات (u_n).
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 26: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{1}{2}$ تحقق $u_0+2u_1=-3$

1) أحسب u_0 ثم أحسب u_n بدلالة n.
2) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=-\frac{3}{1024}$.
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 27: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q و تحقق $243u_7=32u_2$ مع $u_2\neq 0$.

1) أحسب الأساس q,
2) عين u_0 علما أن: $u_0+u_1=20$.
3) أحسب u_n بدلالة n.
4) أدرس تغيرات (u_n).
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 28: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q>0$ وتحقق $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=26 \\ u_2-u_0=16 \end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 29: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=2 \\ u_4+u_5+u_6=1250 \end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 30: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=30 \\ u_2+u_3+u_4=120 \end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 31: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=70 \\ u_1-u_2+u_3=30 \end{cases}$.

1) عين u_1, u_2, u_3 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=640$.
4) أدرس تغيرات (u_n).
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n.

تمرين 32: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_2+u_4=10 \\ u_1\times u_3\times u_5=27 \end{cases}$.

1) عين u_3 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) عين العدد الطبيعي n علما أن: $u_n=59049$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 33: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 42 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 512 \end{cases}$.

1) عين u_3 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 2048$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 34: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{7}{4} \\ u_3 + u_4 + u_5 = \dfrac{7}{16} \end{cases}$.

1) عين u_1 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 2048$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

6) ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ؟

7) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق $|S_n - 4| < 10^{-6}$:

تمرين 35: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1 .

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

د) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{2} v_n + u_n \end{cases}$

أ) أحسب v_2 و v_3 .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

i. بين أن (w_n) متتالية هندسية .

ii. أكتبعبارة الحد العام w_n بدلالة n.

iii. استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

6.8.9 المتتاليات التراجعية :

تمرين36: متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ من أجل كل عدد طبيعي n

f دالة عددية معرفة على المجال $]-2 ; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$.

1- أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2- بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 1$.

3- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

4- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{3^{x+1}+1}{3^{x+1}-1}$

أ. تحقق أن: $u_n = g(n)$

ب. بين أن : $g'(x) = -\frac{2(ln3)e^{(x+1)ln3}}{\left(e^{(x+1)ln3}-1\right)^2}$ و استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n).

5- (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \frac{2}{u_n-1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 +....+w_n$

تمرين37: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n-1}$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}- \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_3 , u_2 , u_1, u_0

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \neq -1$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج تقارب (u_n)

تمرين 38: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$

f دالة معرفة على المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ ، (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 2$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \frac{1}{u_n-2}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

تمرين 39: (u_n) متتالية عددية على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$:

1) أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب،

الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 1$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و استنتج تقارب (u_n)

تمرين 40:

1) لتكن u المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

أ) أحسب u_1، u_2، u_3. نعبر عن كل عدد على شكل كسر غير قابل للاختزال.

ب) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية u و الحدود الأربعة الأولى للمتتالية w المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n = \frac{n}{n+1}$$

ج) باستعمال البرهان بالتراجع، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = w_n$

2) لتكن v المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

أ) بين أن $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$

ب) نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. عبر عن S_n بدلالة n ثم عين نهايتها عندما n يؤول إلى $+\infty$

تمرين 41:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{2u_n+5}$

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]-\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-1}{2x+5}$ و C_f تمثيلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس $\left(; \overrightarrow{} ; \vec{j}\right)$، (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \neq -1$.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n بدلالة n.

ج) بين أن، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

4) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}+1}{2-2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}}$

أ) تحقق أن: $u_n = g(n)$

ب) عين $g'(x)$ و استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

5) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = -\frac{2}{u_n+1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

تمرين 42: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$

f دالة عددية معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$، (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) أ- بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n-1)}{u_n+1}$

ج-استنتج اتجاه تغيرات (u_n)

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$. عين حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n بدلالة n

ج) بين أن، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$

4) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = -\frac{1}{u_n-1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

الفهرس

1. المتتاليات العددية : 1

1.9 تعاريف : 1

2.9 مصطلحات: 1

3.9 اتّجاه تغيّر متتالية عددية: 2

4.9 متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة: 3

5.9 تقارب متتالية عددية: 7

6.9 المتتاليات الحسابية: 12

7.9 المتتاليات الهندسية: 17

8.9 المتتاليان المتجاورتان: 23

9.9 تمارين مقترحة : 28

10.9 تمارين اضافية : 32